Conduzione in una lastra piana

In una lastra piana la temperatura è funzione solo della coordinata x e il calore è trasferito solo lungo tale direzione, ovviamente dal lato più caldo a quello più freddo. Il profilo di temperatura può essere ottenuto facilmente andando ad integrare l'equazione di conservazione dell'energia in condizioni stazionarie, in assenza di termini convettivi e di termini reattivi (o sorgenti):

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)=0 \qquad\qquad T(x)=T_1^s+\left(T_2^s-T_1^s\right)\frac{x}{L}$$

Il profilo di temperatura risulta lineare (se la conducibilità termica è costante). La potenza trasferita lungo la lastra (o in modo equivalente il flusso termico) risulta costante in tutte le sezioni della stessa; la sua espressione analitica può essere ottenuta una volta noto il profilo di temperatura sfruttando la legge di Fourier:

$$Q(x)=-kA\frac{dT}{dx}=\left(T_1^s-T_2^s\right) \qquad\qquad q(x)=-k\frac{dT}{dx}=\left(T_1^s-T_2^s\right)$$

I fenomeni di pura conduzione termica mostrano una evidente analogia con quelli relativi alla conduzione di elettricità. In particolare può essere individuato il concetto di resistenza termica, equivalente a quello di resistenza elettrica, che consente di vedere la lastra (ma anche sistemi più complessi) come un semplice circuito:

$$R_{termica}=\frac{\Delta T}{Q} \quad \Longleftrightarrow \quad R_{elettrica}=\frac{\Delta E}{i} \qquad\qquad \boxed{R_{termica}=\frac{L}{k\cdot A}}$$

Resistenze termiche in serie e in parallelo

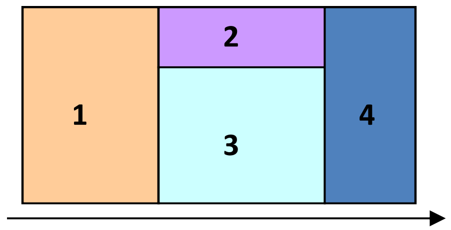
In generale questo tipo di approccio consente di studiare in forma elementare un sistema complesso interessato da conduzione termica riconducendolo ad un vero e proprio circuito di cui dovrà essere valutata la resistenza termica equivalente esattamente come si procede per un circuito elettrico.

$$R_{tot} = f\left(R_1, ..., R_N\right)$$

Si prenda l'esempio di una serie di N lastre piane in serie (si suppone che il contatto tra queste sia perfetto). Per ciascuna di esse può essere calcolata immediatamente la corrispondente resistenza; l'insieme di tutte le lastre offre chiaramente una SERIE di resistenze al passaggio di calore da un lato a quello opposto. Pertanto è evidente come questo sistema possa essere descritto come un circuito elementare costituito da N resistenze in serie.

$$R_{tot} = R_1 + R_2 + ... + R_N$$

In una situazione come quella proposta in figura le lastre 2 e 3 sono in parallelo, ma, prese assieme, risultano essere in serie rispetto alle altre due lastre. Di conseguenza il circuito termico equivalente è quello riportato in figura e la resistenza totale è immediatamente calcolabile:



$$R_{tot} = R_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} + R_4$$

Fino ad ora si è supposto che due lastre a contatto tra loro avessero la stessa temperatura nei punti di contatto, cioè che non si avesse nessun salto di temperatura. Nella realltà questo potrebbe aversi solo se il contattamento fosse perfetto. Questa situazione è però abbastanza rara e richiede che i materiali in gioco siano perfettamente lisci: all'aumentare della rugosità diventa sempre più difficile garantire l'assenza di spazi vuoti nella zona di contatto. Questo si traduce nella presenza di un salto termico non trascurabile nel passaggio da una lastra all'altra. Questa assenza di contattamento perfetto può essere vista come una resistenza termica supplementare in serie posta tra le due lastre a contatto. In letteratura sono disponibili delle tabelle che forniscono una stima di tali resistenze a seconda dei materiali a contatto e del grado di lavorazione di questi.

Conduzione termica in geometrie cilindriche (I)

La conduzione termica in una geometria cilindrica può essere studiata in maniera del tutto analoga a quanto fatto per la lastra piana. L'unica complicazione è dovuta all'adozione di un sistema di coordinate cilindriche. Il punto di partenza è l'integrazione dell'equazione di conservazione dell'energia termica, ancora in condizioni stazionarie e in assenza di termini reattivi, in una geometria cilindrica:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \cdot k \frac{dT}{dr}\right) = 0 \qquad T(r) = a \cdot \ln(r) + b \qquad T(r) = T_2^s + \frac{T_1^s - T_2^s}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_2}\right)$$

Attraverso l'integrazione si ottiene il profilo termico, che non risulta lineare nella coordinata radiale, ma logaritmico. La potenza termica (è meno conveniente ragionare in termini di flusso termico) si ottiene semplicemente dalla legge di Fourier:

$$Q(x) = -kA\frac{dT}{dr} = -k \cdot 2\pi L r \cdot \frac{dT}{dr} = \frac{2\pi L k}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\left(T_1^s - T_2^s\right)$$

La resistenza termica ha una espressione diversa rispetto a quella della lastra piana, ma può essere utilizzata esattamente nello stesso modo:

$$R_t = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi L k} \qquad \Delta T = R_t \cdot Q$$

Conduzione termica in geometrie cilindriche (II)

Spesso si preferisce ragionare in termini di coefficiente di scambio: il suo legame con la resistenza termica è molto semplice:

$$UA = \frac{1}{R_t} \qquad\qquad U_i A_i = U_e A_e$$

Quando si parla di coefficiente di scambio termico è sempre necessario precisare anche l'area rispetto a cui esso viene valutato. Per la lastra non vi è nessun problema dal momento che le sezioni sono tutte equivalenti; per una geometria cilindrica le cose sono evidentemente diverse, per cui si potrà parlare di un coefficiente di scambio riferito all'area esterna e di uno relativo all'area interna:

Conduzione termica in geometrie sferiche

Per determinare il profilo di temperatura in un guscio sferico si integra la solita equazione di conservazione dell'energia sfruttando un sistema di coordinate sferiche:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \cdot k\frac{dT}{dr}\right)=0 \qquad\qquad T\left(r\right)=\frac{a}{r}+b$$

$$T\left(r\right)=T_1^s-\left(T_1^s-T_2^s\right)\left(\frac{1-\left(r_1/r\right)}{1-\left(r_1/r_2\right)}\right)$$

Il profilo risulta per questa geometria iperbolico rispetto alla coordinata radiale. La potenza termica e la resistenza equivalente possono essere individuate facilmente:

$$Q\left(x\right)=-kA\frac{dT}{dr}=\frac{4\pi k}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}\left(T_1^s-T_2^s\right)$$

$$R_t=\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{4\pi k}$$